Zeitschrift

für

Philosophie und philosophische Kritik.

Im Verein mit mehreren Gelehrten

gegründet

von

Dr. J. H. Fichte und Dr. H. Ulrici

redigirt

von

Dr. Richard Falckenberg
Professor der Philosophie in Erlangen.

Neue Folge

Achtundneunzigster Band.

Halle a. S.
C. E. M. Pfeffer (R. Stricker).
1891.

Inhalt.

Über das Trägheitsgesetz.*)

Von

G. Frege,
Professor in Jena.

Es wird ohne Zweifel Viele befremden, daß ein längst als zweifellos anerkanntes Gesetz wie das der Trägheit nochmals einer eingehenden Prüfung unterworfen wird, und daß eine neue Fassung dafür gesucht wird. „Ohne äußere Einwirkung bleibt der ruhende Körper in Ruhe und behält der sich bewegende seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung bei“, das hat sich in unzähligen Fällen bewährt; und was das heißt „ein Körper bewegt sich“ oder „ist in Ruhe“, scheint so klar zu sein, daß nichts zu erklären übrig bleibt. Die untengenannte lesenswerthe Schrift ist dazu geeignet, aus dieser falschen Sicherheit aufzustören und zu weiterm Nachdenken anzuregen. Es ist bekannt, und der Verfasser führt das im Einzelnen vor, daß schon die alten Philosophen Schwierigkeiten in der Beantwortung der Frage gefunden haben, ob ein gegebener Körper sich bewege. Ich erinnere nur an das im Strome verankerte Schiff und an den auf dem segelnden Schiffe rückwärts gehenden Mann, dessen Abstände von den Gegenständen am Ufer sich nicht ändern. In solchen Fällen wird unsere Frage leicht verschieden beantwortet, indem der Eine auf diese, der Andere auf jene Lagenbeziehung mehr Wert legt: ein allgemein anerkanntes Merkmal fehlt. Alle diese Streitigkeiten werden freilich ganz ein-

*) Mit Bezug auf Dr. Ludwig Lange: Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs und ihr voraussichtliches Endergebnis. Leipzig, W. Engelmann, 1886.

fach dadurch geschlichtet, daß man die Unvollständigkeit eines Ausdruckes wie „a bewegt sich“ anerkennt und dafür die Form „a bewegt sich zu b“ setzt. Die Sätze „a bewegt sich zu b“ und „a bewegt sich nicht zu c“ brauchen sich nun nicht mehr zu widersprechen. Auch unsere Physiker werden zugeben, daß niemals die Bewegung eines Körpers schlechthin, sondern nur zu einem andern erfahrbar ist. Damit hat man aber die Mangelhaftigkeit des oben angeführten Ausdrucks für das Trägheitsgesetz anerkannt; denn es ist darin von Bewegung und Ruhe schlechthin die Rede. Und das Schlimme dabei ist, daß man diesen Mangel gar nicht dadurch wieder gut machen kann, daß man die Beziehung auf einen Körper hinzufügt; denn welchen sollte man dazu nehmen? Je nach der Wahl dieses Bezugskörpers würde ein gegebener Körper als ruhend oder als in gerader oder krummer Linie gleichförmig oder ungleichförmig sich bewegend erscheinen. Der Sinn des Trägheitsgesetzes verbietet die Bezugnahme auf irgend einen Körper, weil es keinen giebt, der diese Auszeichnung verdient, während doch eine Bewegung schlechthin unerkennbar bleibt. Dies ist die Schwierigkeit. Wie kommt es nun, daß sie von den Physikern im Allgemeinen so wenig beachtet wird? Der unvollständige Ausdruck „a bewegt sich“ ist so bequem und durch den Sprachgebrauch geheiligt, daß er auch in der Physik nur zu oft angewendet wird. Seine theoretische Unangemessenheit wird um so lieber vergessen, als er über manche Schwierigkeit unvermerkt hinweghilft. Wenn man eine Frage nicht beantworden kann, so kann man sie wenigstens hinter der Wolke einer ungenauen Redeweise verschwinden lassen, was in unserm Falle besonders angenehm ist; denn, wollte man sie als offene behandeln, so würde die Grundlage der ganzen Physik zu schwanken scheinen. Daher wird man sich unbewußterweise gehütet haben, durchweg die vollständige Form „a bewegt sich zu b“ zu gebrauchen. Das Trägheitsgesetz ist obendrein so zum unbezweifelten Gemeingute geworden, daß wir gar nicht so leicht merken, wenn wir es bei seinem Beweise stillschweigend voraussetzen. Wir machen dabei leicht Gebrauch von Bewegungsgesetzen, von Ausdrücken wie „Masse“ und „Kraft“, obwohl das Trägheitsgesetz die Grundlage

aller Bewegungsgesetze ist und erst jenen Ausdrücken einen brauchbaren Sinn verleiht. Wie kommt es aber, daß die Physik trotz dieses Mangels in ihrer Grundlage so sicher fortschreitet? Nun, die Astronomie lehrt ein Coordinatensystem kennen, das für praktische Zwecke fürs Erste genügt. Wenn wir das Trägheitsgesetz von den auf dieses bezogenen Bewegungen aussprechen, so finden wir alle Folgerungen in genügendem Einklange mit der Erfahrung. Theoretisch wird dadurch freilich nichts gewonnen; denn niemand zweifelt, daß die Fixsterne, welche wir zur Festlegung unseres Coordinatensystems brauchen, zu einander nur scheinbar ruhen, und daß dieser Schein die Folge der Ungenauigkeit unserer Beobachtungen ist. Dazu kommt, daß die Bezugnahme auf bestimmte Körper wider das Wesen eines Naturgesetzes streitet, welches Allgemeinheit verlangt. Niemand wird freilich andrerseits daran zweifeln, daß die Vollkommenheit, mit der unser Coordinatensystem die Bedürfnisse der Naturerklärung befriedigt, auf eine Gesetzmäßigkeit hinweist, ohne die jene Befriedigung unerklärlich wäre.

Im Allgemeinen steht man wohl noch auf dem Newton'schen Standpunkt, indem man die Bewegung auf den absoluten Raum und die absolute Zeit bezieht, wie wenig auch die theologische Begründung bei Newton dem heutigen Geschmacke zusagen mag, und obgleich ein Ort des absoluten Raumes in keiner Weise wiedererkannt werden kann, sodaß es unmöglich ist, anzugeben, welche Geschwindigkeit ein Körper in Bezug auf den absoluten Raum und die absolute Zeit habe. Es verschlägt nichts, wenn man die Ausdrücke „absoluter Raum" und „absolute Zeit" vermeidend von wahrer und scheinbarer Bewegung spricht. Der Verfasser fragt: „Mit welchem Recht behauptet Newton, daß die Bahnen sich selbst überlassener Körper geradlinig sind in Bezug auf den absoluten Raum, dessen Teile doch, wie er selber zugiebt, nicht wahrgenommen werden können? . . . Newton könnte uns nicht im mindesten widerlegen, wenn wir seiner Behauptung die entgegengestellten, die absoluten Bahnen sich selbst überlassener Körper seien spiralig gekrümmt." — „Woher weiß Newton, daß die Schwingungen des Uhrpendels, nach absoluter Zeit gemessen, isochron sind?" Newton

bewegt sich in seiner Begründung des Trägheitsgesetzes offenbar im Kreise, wie es noch jetzt vielfach geschieht. Um das Bestehen einer wahren Bewegung und ihren Unterschied von der scheinbaren nachzuweisen, macht man Gebrauch von Bewegungsgesetzen, die das der Trägheit einschließen, und dann erst kann man in Beziehung auf diese wahre Bewegung das Trägheitsgesetz aufstellen. Lange schätzt Newtons absoluten Raum und absolute Zeit nicht einmal als notwendige Übel und nennt sie überflüssige Produkte des esprit métaphysique. Da scheint er mir denn doch etwas über das Ziel hinauszuschießen. Es liegt dies an der gesonderten Betrachtung der Hypothesen, welche nur als Ganzes eine Bedeutung haben. Wenn wir die Hypothese des absoluten Raumes für sich betrachten, so haben wir darin offenbar etwas, was jede Erfahrung überschreitet; die Bewegung in Bezug auf diesen ist unerkennbar, und es lassen sich über sie demnach auch keine Gesetze aus der Erfahrung ableiten. Anders wird die Sache, wenn wir die Hypothesen des absoluten Raumes und der absoluten Zeit mit der des Trägheitsgesetzes zu einer einzigen verbinden. Dadurch wird der absolute Raum mit den wahrnehmbaren Erscheinungen in Zusammenhang gebracht, und unter dieser Voraussetzung lassen sich dann, wie Newton thut, Aussagen über die Bewegung im absoluten Raume machen, welche mit der Erfahrung verglichen werden können. Newton selbst hat sich die Sachlage freilich wohl nicht zum klaren Bewußtsein gebracht. Die Mängel seiner Darstellung sind aus seiner Scheu zu erklären, etwas ausdrücklich als Hypothese aufzustellen; er wollte jeden Schritt unmittelbar aus der Erfahrung oder aus obersten Sätzen ableiten, deren Wahrheit für ihn zweifellos war, und wurde dadurch zur Vereinzelung dessen getrieben, was nur als Ganzes einen Vergleich mit der Erfahrung zuläßt. Mir scheint der Unterschied zwischen Newtons Lehre und der des Verfassers nicht so groß wie diesem. Ich verkenne aber durchaus nicht, daß des Letztern Bemühungen die Frage um ein gutes Stück gefördert haben. Lange bezieht die Bewegung auf „Inertialsysteme“. Er denkt sich nämlich von einem Raumpunkte drei sich selbst überlassene materielle Punkte gleichzeitig ausgehn, die nicht

in einer Geraden liegen, und nennt „Inertialsystem" ein solches Coordinatensystem, in Bezug auf welches die Bahnen dieser Punkte gerade Linien sind. Ein Coordinatensystem dieser Art ist immer anzugeben; natürlich muß seine Lage in jedem Augenblicke in Bezug auf jene drei Punkte bestimmt sein. Daß nun in einem solchen die Bahnen jener Punkte geradlinig sind, ist kein Erfahrungssatz, sondern folgt aus der Definition des Inertialsystems; daß aber irgend ein vierter sich selbst überlassener materieller Punkt in jenem Inertialsysteme sich gleichfalls geradlinig bewege, folgt nicht mehr aus der Definition, und wenn er es dennoch thut, und wenn jeder sich selbst überlassene materielle Punkt es thut, so ist das ein Naturgesetz. Für den zeitlichen Teil des Gesetzes führt Lange nach C. Neumanns Vorgange eine „Inertialzeitskala" ein, nämlich eine Weise der Zeitmessung, nach welcher ein materieller sich selbst überlassener Punkt in einem Inertialsysteme gleichförmig fortschreitet. Daß dann jeder andere materielle Punkt, auf den keine äußere Einwirkung geschieht, ebenfalls gleichförmig in dem Interialsysteme fortschreitet, folgt nicht mehr aus der Definition, sondern ist Naturgesetz. Was wird nun hierdurch gewonnen? Der Verfasser bezeichnet sein Bezugssystem als ein ideales, während Newtons absoluter Raum transcendent real sei. Nach Newtons Worten kann es so scheinen. Wäre aber Newtons absoluter Raum wirklich transcendent, so hätte er für die Naturerklärung die Dienste nicht leisten können, die er doch in der That lange Zeit geleistet hat. Er ist auch mit der Erfahrung durch das Trägheitsgesetz verknüpft; aber freilich in versteckter Weise. Es ist kein geringes Verdienst des Verfassers, an die Stelle dieser versteckten Verknüpfung eine klar ausgesprochene gesetzt zu haben. In der Newtonschen Annahme eines einzigen absoluten Raumes ist mehr enthalten, als zur Erklärung der Erscheinungen nötig ist. Von den unendlich vielen möglichen Inertialsystemen, die sich gegeneinander gleichförmig ohne Drehung bewegen, ist keins irgendwie ausgezeichnet, sodaß man es als ruhend im absoluten Raume eher als irgend ein anderes betrachten könnte. Newton kann daher Ruhe und gleichförmige Bewegung in Bezug auf den absoluten Raum

nicht auseinanderhalten, weil in der Erfahrung kein Anhalt für diese Unterscheidung gegeben ist. Diese für die Erklärung nutzlose und über die Erfahrung hinausgehende Auszeichnung eines einzigen Inertialsystems hat Lange glücklich vermieden und insofern hat er Recht, wenn er bei Newton etwas Transcendentes tadelt.

Für endgiltig abgeschlossen halte ich auch nun die Frage noch keineswegs. Man kann dem Verfasser einen ähnlichen Vorwurf machen wie er dem Newton. Die Frage, ob ein materieller Punkt „sich selbst überlassen" sei, übersteigt nämlich die Erfahrung ebenso wie die, ob er absolut ruhe. Bei Newton war die Frage: wie unterscheiden wir wahre Bewegung von der scheinbaren? Hier ist die Frage: wie unterscheiden wir beeinflußte Bewegung von der eines sich selbst überlassenen materiellen Punkts? Bei Newton bedurften wir zur Beantwortung der Kenntnis des absoluten Raumes, die wir nicht haben; hier bedürfen wir der Kenntnis eines Inertialsystems, die uns gleichfalls fehlt. Denn, um zu wissen, ob ein gegebenes Coordinatensystem ein Inertialsystem sei, müßten wir unsere Frage schon beantwortet haben. Ebenso müßten wir bei Newton, um zu wissen, ob ein gegebenes Coordinatensystem dem absoluten Raume angehöre, die Frage schon beantwortet haben, ob der Coordinatenanfangspunkt im absoluten Raume ruhe. Dieser Mangel rührt in beiden Fällen von der Vereinzelung der Hypothesen her. Nur das Ganze der dynamischen Grundgesetze kann als Hypothese mit der Erfahrung verglichen und durch sie bestätigt werden. So pflegte mein verehrter Lehrer K. Snell das Trägheitsgesetz etwa so auszusprechen: „Ein materieller Punkt hat eine Beschleunigung nur infolge seiner Wechselwirkung mit andern materiellen Punkten." Was unter Wechselwirkung zu verstehen sei, ist nun durch die andern dynamischen Grundsätze näher zu bestimmen. Hierdurch wird das Trägheitsgesetz sogleich mit diesen in Verbindung gebracht.

Noch nach einer anderen Seite bedürfen Langes Aufstellungen einer Ergänzung. Es mag zunächst befremden; aber bei einigem Nachdenken wird man es doch bestätigt finden, daß wir kein Mittel haben zu beobachten, ob und wie stark sich etwa Längen im Verlaufe der Zeit verändern. Bei jedem solchen Urteile, das wir füllen, setzen wir

immer die Unveränderlichkeit eines Maßstabes voraus. Was wir beobachten, ist also nicht die Veränderung einer Länge an sich, sondern nur die Veränderung des Verhältnisses zu einer andern Länge.*) Wenn alle Abstände gleichzeitig auf die Hälfte herabgingen, so hätten wir gar kein Mittel das zu bemerken; denn die Gesichtswinkel, unter denen uns Gegenstände erschienen, blieben dieselben und, da unser eigner Körper an der Schrumpfung teilnähme, auch die Parallaxen in Bezug auf unsere Augen und alle Verhältnisse zu den Längen unserer Körperteile. Man könnte sagen: die Accomodation der Augen müßte verändert werden; aber darüber läßt sich gar nichts sagen; es wird damit schon etwas Dynamisches eingemischt, nämlich die elastischen Kräfte des Aethers. Wir müssen uns hier auf den Standpunkt stellen, wo wir von Kräften noch nichts wissen. Was Kraft ist, kann erst später erklärt werden. Hier fragen wir: was läßt sich beobachten, ohne irgend eine Hypothese über die Bewegung der Materie einzumischen? Was ist rein erfahrungsmäßig? Und da läßt sich nicht leugnen, daß wir kein Mittel haben, die Beständigkeit eines Abstandes zu beobachten ebenso, wie wir kein Mittel haben, einen Raumpunkt nach Verlauf einiger Zeit wiederzuerkennen und ebenso, wie wir kein Mittel haben zu entscheiden, ob es ein Inertialsystem gebe, zu dem ein materieller Punkt ruhe. Wohl verstanden: wir haben keine Mittel, ohne Hypothesen einzumischen. Ich will damit nicht sagen, daß kein Unterschied zwischen der gleichförmigen und der beschleunigten Bewegung eines Punktes bestehe, oder zwischen der Beständigkeit und der Änderung eines Abstandes; aber diese Unter-

*) Es ist also ganz falsch, daß ein fester Maßstab zu den Grundlagen der Geometrie gehöre. Ob eine Länge sich im Laufe der Zeit ändert oder nicht, ist für die Geometrie völlig einerlei, ja vom rein geometrischen Standpunkte hat diese Frage gar nicht einmal einen Sinn. Die Vergleichung von Längen, die nicht zur selben Zeit gegeben sind, fällt gar nicht ins Gebiet der Geometrie. Die Zeit geht diese Wissenschaft nichts an, folglich auch nicht die Festigkeit, von der nur in Bezug auf den Zeitverlauf gesprochen werden kann. Das gehört in die Physik. Sollten nicht auch der Phosphorgehalt des Gehirns und die hohe Temperatur der Sonne zu den Grundlagen der Geometrie gehören?

schiede können erst anerkannt werden, nachdem ein Ganzes von Hypothesen anerkannt ist. Wie sich uns die Annahme der Ruhe des Erdkörpers mit einer gewissen zwingenden Gewalt aufdrängt wegen der überwiegenden Fülle der gegeneinander ruhenden Erscheinungen, die er darbietet, und wie auf einem höhern Standpunkte der Fixsternhimmel als ruhend betrachtet wird, weil die Fixsterne unter einander zu ruhen scheinen, so können wir kaum umhin, eine Länge als unverändert anzunehmen, wenn sie zu der überwiegenden Gesamtheit von Längen gehört, deren Verhältnisse sich nicht zu ändern scheinen. In allen diesen Fällen leitet uns die Wahrnehmung einer ausgedehnten vergleichsweisen Beständigkeit zur Annahme eine Beständigkeit schlechthin, obwohl auf dem rein geometrischen Standpunkte eine beziehungslose Ruhe eigentlich ebensowenig Sinn hat wie eine beziehungslose Starrheit. In einer von Lange angeführten Stelle*) sagt Leibniz: „Deshalb ist die Bewegung ihrer eignen Natur nach respektiv. Dies gilt aber nur in mathematischer Strenge. Indessen schreiben wir den Körpern die Bewegung in Gemäßheit derjenigen Hypothesen zu, wodurch die Erscheinungen am angemessensten erklärt werden, und es ist gar kein Unterschied zwischen einer wahren und einer passenden Hypothese." Lange nimmt hier mit Recht Anstoß an dem Ausdrucke „Hypothese" und zieht Convention" vor. Man könnte auch „Definition" sagen. Conventionen sind eigentlich weder wahr noch falsch, sondern zweckmäßig oder unzweckmäßig. Man wird immer diejenige Sprechweise vorziehn, in welcher die Naturgesetze am einfachsten ausgedrückt werden können. So auch hier: man wird nicht behaupten können, eine Länge bleibe unverändert, bevor man nicht gesagt hat, wie man Abstände, die nicht gleichzeitig gegeben sind, mit einander vergleichen will; und je nach dieser Festsetzung wird man von einem gegebenen Abstande sagen, er ändere sich oder nicht. Aber nicht alle möglichen Festsetzungen sind zweckmäßig für einen kurzen Ausdruck der Naturgesetze. Wenn man also ein Coordinatensystem für die Betrachtung der Bewegung einführen will, so muß man auch die Längeneinheit für jeden Augenblick bestimmen.

*) Leibnizens mathem. Schriften hersg. v. Gerhardt Bd. VI S. 507.

Zur Erläuterung mag noch folgende Betrachtung hinzugefügt werden. Es sei ein Parallel-Coordinatensystem und eine Weise der Zeit- und Längenmessung gegeben der Art, daß drei materielle sich selbst überlassene Punkte auf dreien durch den Anfangspunkt gehenden Geraden gleichmäßig fortschreiten, und zwar so, als ob sie gleichzeitig im Anfangspunkte der Coordinaten gewesen wären. Der diesem Zusammensein entsprechende Augenblick mag zum Nullpunkte der Zeit genommen werden. Dann sind ihre Coordinaten der Zeit proportional und das von ihnen gebildete Dreieck bleibt sich ähnlich. Nun beziehen wir Alles auf ein neues Coordinatensystem, das sich von dem ersten nur dadurch unterscheidet, daß die Längeneinheit in ihm proportional der Zeit ist, gemessen durch die Längeneinheit im ersten System. Es mögen die alte und neue Längeneinheit zur Zeit 1 übereinstimmen. Nennen wir nun eine Coordinate im alten Systeme x und die entsprechende im neuen ξ, so ist

$$\xi = \frac{x}{t}$$

zur Zeit t. In Bezug auf dieses neue Coordinatensystem ruhen nun unsere drei Punkte. Die alten Coordinaten irgend eines Punkts, der sich in Bezug auf das alte System gleichmäßig auf einer Geraden bewegt, sind ganze Funktionen ersten Grades der Zeit, also von der Form

$$x = a + b \cdot t$$

Daraus folgt für die Coordinaten im neuen Systeme die Form

$$\xi = a \cdot \frac{1}{t} + b\,;$$

d. h. im neuen Systeme sind die Coordinaten ganze Funktionen ersten Grades von $\frac{1}{t}$. Im neuen Systeme würde sich also der Punkt nicht mehr gleichmäßig bewegen bei der bisherigen Zeitmessung. Wir können aber eine neue Zeitmessung so einführen, daß in Bezug auf sie der Punkt sich gleichmäßig fortbewegt. Wir brauchen nur

$$\frac{1}{t} = \tau$$

zu setzen, wo nun τ die Zahl ist, welche in der neuen Zeitmessung denselben Augenblick bezeichnet wie t in der alten. Dann sind gleichförmig geradlinig sich bewegende Punkte im alten Systeme nach der alten Zeitmessung wieder gleichförmig geradlinig sich bewegende oder ruhende Punkte im neuen Systeme nach der neuen Zeitmessung. Beide Systeme sind nach der Worterklärung Inertialsysteme, da wir annahmen, daß die drei zuerst betrachteten Punkte sich selbst überlassen seien; und von beiden gilt, daß irgend ein vierter sich selbst überlassener materieller Punkt auf einer geraden Linie gleichmäßig fortschreitet. Freilich sind diese Linien im Allgemeinen verschieden, und der frühere Anfangspunkt der Zeit ist in unendliche zeitliche Ferne hinausgerückt, und umgekehrt: die frühere unendliche zeitliche Ferne ist zu dem Zeitpunkte $\tau = 0$ geworden. Was also früher, so zu sagen, als ideales, nie völlig zu erreichendes Ziel nur vorschwebte, das wird nun wirklich einmal erreicht, aber auch gleich wieder verlassen. Wir haben nun die Gleichung

$$\xi = x \cdot \tau,$$

woraus folgt, daß ξ nur unendlich werden kann, wenn x oder wenn τ unendlich wird. Das Letztere würde mit dem übereinstimmen, was bei der uns geläufigen Orts- und Zeitbestimmung vorkommen kann, daß sich nämlich ein Körper im Verlaufe der Zeit weiter und immer weiter über jede Grenze hinaus entfernt. Daß aber ein materieller Punkt zu einer im Endlichen liegenden Zeit sich ins Unendliche verliere, um gleich darauf wieder im Endlichen aufzutreten, kommt uns ungereimt vor, und zunächst könnte es scheinen, als ob dies bei der neuen Raum- und Zeitmessung möglich wäre, indem ξ auch bei einem endlichen τ dadurch unendlich würde, daß x es würde. Nehmen wir an, die alte Messungsweise sei die uns geläufige; dann könnte x nur für unendliches t unendlich werden, und nach unserer Naturkenntnis dürfen wir wohl annehmen, daß x nur in demselben Grade wie t unendlich wird, wenn es nicht endlich bleibt. Danach würde $\frac{x}{t}$ oder ξ auch bei

unendlichem x endlich bleiben, und es würde auch für die neue Raum- und Zeitmessung bestehen bleiben, daß ein materieller Punkt für einen im Endlichen liegenden Zeitpunkt nicht ins Unendliche entschwinden kann, sondern nur mit der unendlich werdenden Zeit selber.

Die Beschleunigung in Bezug auf die neue Messung muß zugleich mit der in Bezug auf die alte 0 werden; denn wir sahen, daß eine nicht beschleunigte, also gleichförmige Bewegung im alten Systeme sich wieder als eine solche im neuen darstellt. Wir werden uns also nicht wundern, daß die Rechnung folgenden Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen im neuen und im alten Systeme ergiebt:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = t^3 \frac{d^2x}{dt^2} \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2} = \tau^3 \frac{d^2\xi}{d\tau^2}.$$

Daraus folgt, daß für denselben Zeitpunkt alle Beschleunigungen im neuen Systeme dieselben Verhältnisse zu einander haben wie die entsprechenden im alten. Nun beziehen sich alle allgemeinen Bewegungsgesetze nur auf die Verhältnisse der Beschleunigungen zu derselben Zeit. Alle diese Gesetze behalten also auch für die neue Zeit- und Raummessung Giltigkeit. Ich führe als solche Gesetze auf den Satz vom Parallelogramm der Beschleunigungen, den Satz, daß die Beschleunigungen, welche aus der Wechselwirkung von zwei materiellen Punkten hervorgehn, in der Verbindungslinie enthalten, entgegengesetzt gerichtet sind und in einem Verhältnisse zu einanderstehen, das für dieselben beiden Punkte immer dasselbe ist; ferner den Satz, daß aus dem Beschleunigungsverhältnisse der materiellen Punkte A und B und dem der Punkte A und C das Beschleunigungsverhältnis für C und B einfach zusammengesetzt ist. Alles dies bleibt bestehen, wenn alle gleichzeitig stattfindenden Beschleunigungscomponenten in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert werden; auch aus diesen Gesetzen ist nichts Entscheidendes für die eine und gegen die andere Weise der Raum- und Zeitmessung zu entnehmen. Anders wird die Sache, wenn wir die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Entfernung der in Wechselwirkung befindlichen Punkte ins Auge fassen. Nach dem Newton'schen Gesetze ist die Beschleunigung eines

materiellen Punkts, die aus der Wechselwirkung mit einem andern entspringt, dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional:

$$p = \frac{a}{r^2},$$

wo p diese Beschleunigung, r der Abstand der beiden Punkte und a eine von der Zeit unabhängige Constante ist, Alles in Bezug auf die uns geläufige Raum- und Zeitmessung. Im neuen Systeme mag dem p das π, dem r das ϱ entsprechen. Dann haben wir $p = \tau^3 \pi$, $r = \frac{\varrho}{\tau}$, und wir erhalten

$$\pi = \frac{a}{\tau \cdot \varrho^2}.$$

Hier käme also eine unmittelbare Abhängigkeit von der Zeit hinein, oder die Constante a würde durch eine von der Zeit abhängige Zahl $\frac{a}{\tau}$ ersetzt. Die uns geläufige Raum- und Zeitmessung ist also dadurch ausgezeichnet, daß in Bezug auf sie das Newton'sche Gesetz einen die Zeit nicht enthaltenden Ausdruck erhält. Und das verlangen wir von einem Naturgesetze. Wenn wieder dieselben Umstände eingetreten sind, so erwarten wir, daß sich auch dieselben Folgen daran knüpfen, einerlei zu welcher Zeit dies geschieht. Wenn wir doch andere Folgen eintreten sehen, so schließen wir daraus, daß wir nicht alle in Betracht kommenden Umstände beachtet haben; wir schieben aber die Schuld nicht auf den andern Zeitpunkt an sich.

Danach scheint mir fürs Erste nichts Anderes übrig zu bleiben als zu sagen:

Es läßt sich ein Coordinatensystem und eine Weise der Längen- und Zeitmessung so aufstellen, daß die Bewegung der materiellen Punkte in der ganzen Welt in Beziehung hierauf so erfolgt, daß die Beschleunigung eines beliebigen sich nach dem Satze vom Parallelogramm der Beschleunigungen in Componenten zerlegen läßt, deren jede einer Wechselwirkung mit einem andern materiellen Punkte entspricht, wobei nun die oben ausgesprochenen Gesetze von der Wechselwirkung gelten, und wobei die Gesetze,

nach denen sich die Größe der Beschleunigung für die einzelne Wechselwirkung richtet, weder die Zeit noch die Lage der materiellen Punkte zum Coordinatensysteme enthalten, sodaß man den Anfangspunkt der Zeit verlegen und statt des Coordinatensystems ein congruentes, mit dem ersten fest verbundenes einführen kann, ohne daß in den analytischen Ausdrücken jener Gesetze sich mehr ändert, als daß die alten Buchstaben durch die entsprechenden neuen ersetzt werden.

Daß es dann unendlichviele solche Coordinatensysteme giebt, die zu einander sich gleichförmig ohne Drehung und Veränderung des Maaßstabes bewegen, ist ein mathematischer Lehrsatz.

Was nun die Frage nach der Realität der Bewegung betrifft, so droht sie, wie mir scheint, in einen Wortstreit auszuarten. Es kann sich nur darum handeln, ob der Unterschied zwischen beschleunigter und nicht beschleunigter Bewegung oder, wie Lange sagt, zwischen Inertialdrehung und Inertialruhe (S. 56) und die Unterschiede zwischen den verschiedenen Arten der beschleunigten Bewegung real sind. Folgende Entscheidung möchte hier am meisten sachgemäß sein. In demselben Sinne, wie man die Beständigkeit einer Länge (z. B. eines Normalmeterstabes bei unveränderter Temperatur) real nennt, sind auch jene Unterschiede der verschiedenen Bewegungsarten real. Wir haben in beiden Fällen willkürliche Festsetzungen, die aber mit der Gesetzmäßigkeit der Natur so eng verknüpft sind, daß sie dadurch vor allen andern logisch und mathematisch gleich möglichen besonders ausgezeichnet sind. Wenn man diese enge Verknüpfung mit der Gesetzmäßigkeit des Geschehens durch das Wort „real“ ausdrücken will, so muß man es in beiden Fällen thun. Vielleicht ist aber das Wort „objektiv“ passender.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden in Bezug auf die Ausdrücke „Begriff“ und „Vorstellung“. Das erstere, scheint mir, wird am besten der Logik zugewiesen; denn diese hat doch wohl das älteste Anrecht daranf, und sie bedarf eines solchen Ausdrucks, um ihre Gesetze aussprechen zu können; was sie zu diesem Zwecke vom Begriffe verlangen muß, ist die scharfe Be-

grenzung, keineswegs aber die Widerspruchslosigkeit. Was diese scharfe Begrenzung nicht zeigt, kann in der Logik nicht als Begriff anerkannt werden, ebensowenig wie in der Geometrie etwas als Punkt anerkannt werden kann, was nicht ausdehnungslos ist, weil es sonst unmöglich wäre, die geometrischen Axiome aufzustellen. In jeder Wissenschaft muß für die Ausbildung der Kunstsprache der Gesichtspunkt maßgebend sein, daß die Gesetzmäßigkeit in der möglichst einfachen uud dabei vollkommen genauen Weise zum Ausdruck gelangen kann. Und von diesem Gesichtspunkte aus muß ich es bedauern, daß das Wort „Begriff" jetzt vielfach in Wendungen gebraucht wird, welche mit jenem logischen Sinne nicht vereinbart werden können. Für den logischen Begriff giebt es keine Entwickelung, keine Geschichte, wenigstens nicht in dem Sinne, wie man davon zu sprechen pflegt. Ich kann es nicht mit dem Verfasser für ein großes Bedürfnis halten, von einer Entwickelungsgeschichte eines Begriffes reden zu können; und ich finde, daß wohl Grund vorhanden ist, diese Wendung zu vermeiden. Wenn man statt dessen sagte „Geschichte der Versuche, einen Begriff zu fassen" oder „Geschichte der Erfassung eines Begrisses", so schiene mir dies weit sachgemäßer zu sein; denn der Begriff ist etwas Objektives, das wir nicht bilden, das sich auch nicht in uns bildet, sondern das wir zu erfassen suchen und zuletzt hoffentlich wirklich erfassen, wenn wir nicht irrtümlicherweise da etwas gesucht haben, wo nichts ist. „Die Zahl Drei fällt unter den Begriff der Primzahl" ist eine objektive Wahrheit; wenn ich sie ausspreche, so meine ich nicht: ich finde in mir eine Vorstellung, die ich „Drei" nenne, und eine andere, die ich „Primzahl" nenne, und diese Vorstellungen stehen in einer eigentümlichen Beziehung zu einander; ob ähnliche Vorstellungen auch in andern Menschen vorkommen, und ob sie in einer ähnlichen Beziehung zu einander stehen, bedarf einer weitern Feststellung; ob die Vorstellung, die ich „Primzahl" nenne, sich nicht ganz allmählich so verändern wird, daß sie nicht mehr zu jener andern in jener eigentümlichen Beziehung stehen wird, kann ich nicht wissen; das muß die weitere Erfahrung lehren.

Wenn man so sagen wollte, so würde man offenbar den eigentlichen Sinn des Satzes völlig verfehlen; ebenso aber auch, wenn man statt „ich finde in mir diese Vorstellungen" sagen wollte, „ich bilde in mir diese Begriffe"; denn man würde dann immer noch über einen Vorgang im eignen Innern berichten. Vielmehr wollen wir mit unserm Satze etwas behaupten, was ganz unabhängig von unserm Wachen oder Schlafen, Leben oder Tod objektiv immer galt und gelten wird, einerlei, ob es Wesen gab oder geben wird, welche diese Wahrheit erkennen oder nicht.

Lange meint, „daß ein sich noch entwickelnder Begriff seiner Natur nach von innern Widersprüchen nicht frei ist: wäre er es, so fehlte ja jedes Motiv zu weiterer Entwickelung". Das scheint mir eine ganz falsche Darstellung zu sein, die im Besondern auch auf den vorliegenden Fall nicht zutrifft. Ein Widerspruch in einem Begriffe ist gar kein Grund zu seiner Entwickelung. Der Begriff des Sichselbstungleichen enthält einen Widerspruch und bleibt nichtsdestoweniger, was er ist und stets war, und macht noch immer keine Miene sich weiter zu entwickeln. Er hat gutes Recht, in der Logik als Begriff anerkannt zu werden; denn seine Begrenzung ist so scharf wie nur möglich, und er kann zur Definition der Anzahl 0 gut verwendet werden, wie ich in meinem Buche über die Grundlagen der Arithmetik gezeigt habe. Auch in unserm Falle sind es keine Widersprüche in dem Begriffe der Bewegung, die zur Entwickelung treiben. Allerdings haben sich Widersprüche gezeigt, aber nicht so, daß man etwa einander widersprechende Merkmale in der Definition vereinigt hätte, sondern dadurch, daß man etwas als Begriff behandelt hat, was im logischen Sinne keiner ist, da die scharfe Begrenzung fehlt. Man suchte nach einer Grenzlinie und wurde durch die auftauchenden Widersprüche darauf aufmerksam, daß die angenommene Begrenzung noch eine unsichere, verschwommene, oder doch nicht die gesuchte war. So trieben allerdings Widersprüche den suchenden Geist weiter, aber nicht Widersprüche in dem Begriffe; denn diese führen immer eine scharfe Begrenzung mit sich: man weiß eben, daß nichts unter einen widerspruchsvollen Begriff fällt; ein Zweifel also, ob ein

Gegebenes darunter falle oder nicht, ist, sobald der Widerspruch erkannt ist, unmöglich. Was weiter treibt, ist die Wahrnehmung der verschwommenen Begrenzung. So haben sich auch in unserm Falle alle Bemühungen darauf gerichtet, eine scharfe Grenzlinie aufzufinden. Man kann jetzt wohl sagen, daß sie darum erfolglos waren, weil eine Grenzlinie an der Stelle, wo man sie suchte, gar nicht vorhanden ist. Man hat dafür eine andere Grenzlinie aufgefunden, nicht zwischen Bewegtem und Nichtbewegtem, aber zwischen Inertiell-Ruhigem und Nichtinertiell-Ruhigem; und dem Verfasser gebührt der Ruhm, diese Grenzlinie zuerst deutlich gesehen zu haben. Und damit kann er sich darüber trösten, wenn es ihm nicht gelungen sein sollte, „den Begriff der Bewegung dem Ziele seiner Entwickelung etwas rascher zuzuführen".

Ebensowenig wie mit dem Gebrauche des Wortes „Begriff" kann ich mich mit dem des Wortes „Vorstellung" einverstanden erklären. Wie das erstere der Logik, so ist das letztere zweckmäßigerweise der Psychologie zuzuweisen. Man bleibt dabei nicht nur in der engsten Fühlung mit dem Sprachgebrauche des Lebens, sondern auch mit dem Herkommen in der Psychologie. Wir sagen „ich stelle mir etwas vor" und meinen damit einen inneren seelischen Vorgang und verstehen unter „Vorstellung" ein inneres Gebilde Danach sollte man in der Physik, Mathematik, Logik niemals das Wort „Vorstellung" gebrauchen oder höchstens, um es als ungeeignet abzuweisen. Die Physik hat es z. B. mit Körpern zu thun und wie alle Wissenschaften auch mit Begriffen, aber nicht mit Vorstellungen: die mögen der Psychologie vorbehalten bleiben. Von einer Vorstellung sollte man wissenschaftlich eigentlich nie reden, ohne die Beziehung auf einen Vorstellenden, auf einen Besitzer wenigstens anzudeuten. Denn die Vorstellung des Einen ist nicht die des Andern, so wenig wie die Nase des Einen die des Andern ist, und wäre sie ihr selbst congruent. Der beziehungslose Gebrauch des Wortes „Vorstellung" ist wissenschaftlich ebenso verwerflich wie der des Wortes „Bewegung."

Lange sagt z. B.: „Wir übersehen, daß in unsere Urteile über „wirkliche" Bewegung die Vorstellung der Erde mit eingeht"

und anderswo: „die Vorstellung der Lage eines Punktsystems ist die Vorstellung der Orte seiner sämtlichen Punkte.“ Kann sich der Verfasser die Orte sämtlicher Atome eines Stücks Papier vorstellen? Aber darauf kommt es hier auch gar nicht an; wenn nur die Lage eines Punktsystems der Inbegriff der Orte seiner Punkte ist, so möchte das ausreichen. Was gehen uns hier die Vorstellungen an, die irgend jemand sich davon macht? Wann wird man aufhören, Psychologisches und Logisches, Begriffe und Vorstellungen durch einander zu quirlen? Freilich könnte der Verfasser den Sprachgebrauch umgekehrt für sich geltend machen und mir hundert Bücher und Abhandlungen zu diesem Zwecke anführen. Leider könnte er das, und diese Bemerkungen richten sich also nicht besonders gegen ihn und das vorliegende Buch. Ich leite die Nothwendigkeit zu unterscheiden und der Logik einen Ausdruck, der Psychologie einen andern zuzuweisen aus der Natur der Sache und einem wissenschaftlichen Bedürfnisse ab und ziehe den Sprachgebrauch nur heran, wenn es sich um die Auswahl der Ausdrücke handelt. Nie kann aber der Sprachgebrauch die Verdeckung vorhandener Unterschiede rechtfertigen.

Doch ich möchte von diesem anregenden Buche nicht mit der Hervorhebung einer abweichenden Meinung Abschied nehmen, sondern noch auf die im ersten Anhange gegebene ablehnende Kritik der sogenannten „absoluten Translation der Sonne“ zustimmend hinweisen und mich dem Satze anschließen, „daß die Elementarbegriffe nicht das von Ursprung an der wissenschaftlichen Betrachtung gegebene sind,“ sondern, wie ich mich ausdrücken möchte, durch logisch zerlegende Arbeit erst entdeckt werden müssen. So sind auch der Chemie die Elemente nicht von Anfang an gegeben, sondern ihre Entdeckung bezeichnet einen schon hohen Entwickelungsstand dieser Wissenschaft. Das logisch und sachlich Erste ist nicht das psychologisch und geschichtlich Erste.
